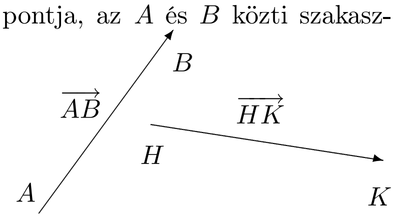
Vektoralgebra

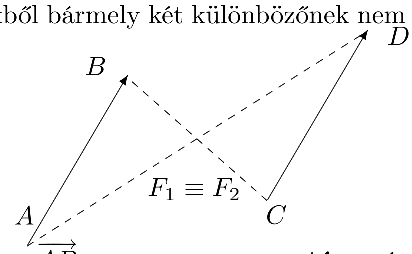
A közönséges geometriai tér vektorai

1. Alapfogalmak

A hétköznapi tér – az elemi geometria háromdimenziós euklideszi tere – két különböző pontja, az A és B közti szakasznak kétféleképpen adhatunk irányítást. $\overrightarrow{AB}$ jelöli azt az **irányított egyenes szakaszt**, melynek **kezdőpont**ja A, **végpont**ja B. Az irányított egyenes szakaszok közé számítjuk az $\overrightarrow{AA}$ szimbólummal jelölt elfajuló szakaszt is, mely pusztán egy pont – a szakasz kezdő és végpontja egybeesik.



Vektor. Az irányított egyenes szakaszok összességét felosztjuk olyan osztályokra, melyekből bármely két különbözőnek nem lesz közös része. *Azt mondjuk, hogy azt $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ irányított egyenes szakaszok egy osztályba tartoznak, ha az AD és CB szakaszok felezéspontjai egybeesnek.* Egy ilyen osztályt nevezünk **vektor**nak. A vektorokat vastag betűvel, írásban aláhúzva vagy fölényilazva jelöljük:



$$\mathbf{a}, \quad \underline{a}, \quad \vec{a}$$

Azt, hogy az $\overrightarrow{AB}$ irányított egyenes szakasz az $\mathbf{a}$ vektorhoz tartozik, úgy is mondjuk, hogy $\overrightarrow{AB}$ az $\mathbf{a}$ egy **reprezentáns**a és ha kell, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$-va jelöljük. Elemi geometriai tény, hogy ha megadunk a térben egy pontot, P-t, akkor minden $\mathbf{a}$ vektornak van olyan reprezentánsa, melynek kezdőpontja P, tehát van olyan Q pont, hogy $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a}$. Ezt úgy mondjuk, hogy „egy vektor bármely pontból felmérhető”.

Vektor hossza, iránya, irányítása. Tegyük fel, hogy $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ nem **kollineáris,** azaz nem egy egyenesbe eső irányított egyenes szakaszok és egyik sem nulla hosszúságú. Ha $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$ ugyanannak az $\mathbf{a}$ vektornak a reprezentánsai, akkor $ACDB$ ilyen sorrendben egy paralelogrammát alkot. Ebből rögtön következik, hogy AB és CD – minthogy a paralelogramma egymással szemközti oldalai – **komplanáris**ak (egy síkban vannak), párhuzamos egyenesekbe esnek és egyenlő hosszúak. Igaz továbbá, hogy a végpontokat összekötő BD és a kezdőpontokat összekötő AC szakaszok nem metszenek egymásba, amit úgy mondunk, hogy azonos irányításúak. Az is világos, hogy az $\mathbf{a}$ vektor bármely két reprezentánsára igazak az előbbi megállapítások. Kollineáris esetben szintén értelmezhető a hossz és azonos irányítottság fogalma, nulla hosszúságú ($\overrightarrow{PP}$ típusú) irányított szakasz esetén az irány és irányítás forgalma nem természetesen adódik, de a későbbi vizsgálatok értelmezhetővé teszik ezeket a jellemzőket a nulla hosszúságú reprezentánsakkal rendelkező, úgy nevezett **nullvektor** esetén is. Mindezek miatt értelmezhetőek a következő fogalmak.

Az ábrán látható kapcsolat két irányíott egyenes szakasz között *ekvivalenciareláció*. Jelölje $\mathcal{I}$ az irányított egyenes szakaszok halmazát. Ha $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \in \mathcal{I}$, akkor legyen

$$\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{c} AD \text{ és } CB \\ \text{felezéspontjai} \\ \text{egybeesnek} \end{array}$$

Ekkor $\langle \mathcal{I}, \cong \rangle$ olyan relációstruktúra, melyben minden $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF} \in \mathcal{I}$-re

1. $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{AB}$ (reflexív),
2. $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD}$ és $\overrightarrow{CD} \cong \overrightarrow{EF}$, akkor $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{EF}$ (tranzitív),
3. $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD}$, akkor $\overrightarrow{CD} \cong \overrightarrow{AB}$ (szimmetrikus)

Ekkor $\mathcal{I}$ szétesik egymással páronként diszjunkt, nemüres halmazok uniójára, mely halmazokban az egymással „ekvivalens” elemek vannak. Ez a $\mathcal{I}/_{\cong}$ osztályfelbontás.

Definíció. Az $\mathbf{a}$ vektor **hossz**án bármely reprezentánsának hosszát értjük és $|\mathbf{a}|$-val jelöljük.

Definíció. Az $\mathbf{a}$ vektor **irány**án az összes olyan vektor halmazát értjük, amelynek reprezentánsai párhuzamosak az $\mathbf{a}$ reprezentánsaival. Azt, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor iránya azonos, úgy jelöljük, hogy $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$. A nullvektor definíció szerint párhuzamos minden vektorral.

Definíció. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok azonos irányításúak, ha reprezentánsaik párhuzamosak és azonos irányításúak. Egy $\mathbf{a}$ vektor **irányítás**án a vele azonos irányítású vektorok halmazát értjük. Azt, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ azonos irányításúak úgy jelöljük, hogy $\mathbf{a} \upuparrows \mathbf{b}$. Ha párhuzamosak, de nem azonos irányításúak, akkor ezt $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$ jelöli. A nullvektor minden vektorral azonos irányításúk, definíció szerint.

Elemi geometriai módszerekkel igazolható, hogy a fenti definíciók helyesek, azaz nem függnek a reprezentánselem választásától.

Tétel. Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok, akkor

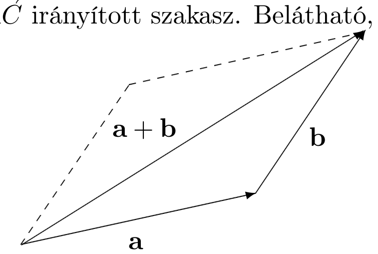
$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \text{ akkor és csak akkor, ha } \begin{cases} |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| & \text{és} \\ \mathbf{a} \parallel \mathbf{b} & \text{és} \\ \mathbf{a} \upuparrows \mathbf{b} & \end{cases}$$

Tehát két vektor egyenlő, ha hosszuk, irányuk és irányításuk megegyezik.

Definíció. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem kollineáris vektorok **szög**én értjük azt a belső szöget, mely egy tetszőlegesen választott $\overrightarrow{PA} = \mathbf{a}$ és $\overrightarrow{PB} = \mathbf{b}$ irányított egyenes szakasz esetén az PAB háromszög P csúcsánál van. Egy egyenesbe eső vektorok esetén, ha nem nullvektorok és $\mathbf{a} \upuparrows \mathbf{b}$ akkor a szög definíció szerint 0^o, ha $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$, akkor a szög 180^o. A nullvektor bármely vektorral 0^o-os szöget zár be.

2. Vektorok összege

Az $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ és $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$ vektorok összegén értjük azt a vektort, melynek reprezentánsa az $\overrightarrow{AC}$ irányított szakasz. Belátható, hogy ez jól definiált művelet, azaz mindegy, hogy melyik $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BC}$ irányított szakaszt választottuk (csak az a lényeg, hogy a második az első végpontjából legyen felmérve – ami viszont nem jelent megszorítást). Az előbbi definíció az összeg „vektorfűzés” útján történő értelmezése. Ugyanezt a fogalmat kapjuk, ha a „paralelogramma” módszerrel definiáljuk az összeadást. Ez utóbbi szerint azonos P kezdőpontból kell felmérni a vektorokat és az összeget a P-ből a szakaszok által kifeszített paralelogramma P-vel átellenes Q pontjába mutató irányított szakasz határozza meg (ez esetben gondot okoz az, hogy kollineáris vagy nulla hosszúságú szakaszok esetén nincs paralelogramma).



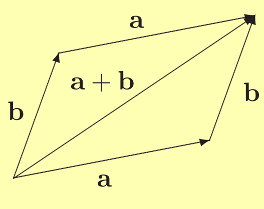
A vektorösszeadás kommutatív és asszociatív. Tetszőleges $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorokra

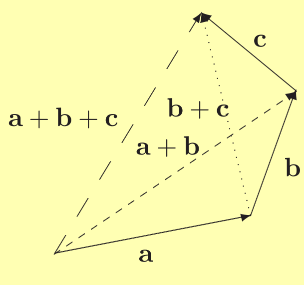
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$
(kommutatív)

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$
(asszociatív)

Az utóbbi szabály lehetővé teszi, hogy a zárójeleket elhagyjuk a többes összegeknél, így $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ illetve $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ jelölése egyaránt $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

A vektorösszeadás kommutatív és asszociatív szabálya végeredményben nem más, mint az a kijelentés, hogy az ábrán látható *diagramok kommutatív*ak, a következő értelemben. Egy nyilakat tartalmazó diagramot (irányított gráfot) akkor tekintünk kommutatívnak, ha igaz az, hogy bármely két pont között haladó bármely két nyílfolytonos út egyenlő (azonosnak tekinthető). A vektoralgebra esetén a nyilak a vektorok, a nyilak egymáshoz kapcsolása az összeadás, a fenti diagramok kommutativitása pedig pont az említett két azonosságot eredményezi. Megjegyezzük, hogy kommutatív diagramok a *kategóriaelmélet* illetve az *univerzális algebra* alapfogalmai.





Különbség, nullvektor, ellentett vektor.

A számok kivonásának művelete kivezetett a természetes számok köréből. Vajon a vektorokéból kivezet-e? A vektorkivonás műveletéhez jutunk, ha meg kívánjuk oldani az $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$ vektoregyenletet. Vizsgáljunk meg két speciális esetet:
1. Ha $\mathbf{b} = \mathbf{a}$, akkor az $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{a}$ egyenlettel állunk szemben. Itt van fontos szerepe a $\overrightarrow{PP}$ típusú, nulla hosszúságú irányított egyenes szakaszoknak. Ha az ezek által reprezentált nullvektort $\mathbf{0}$ jelöli, akkor világos, hogy $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ az egyetlen megoldás. Az

Ha $\mathbf{V}$-vel jelöljük a vektorok halmazát, akkor a $\mathfrak{V} = \langle \mathbf{V}, +, -(\,.\,), \mathbf{0} \rangle$ struktúra *kommutatív* vagy *Abel-csoport*ot alkot. Ez azt jelenti, hogy minden $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{V}$ elemre teljesül:
1. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
2. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$
3. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = (-\mathbf{a}) + \mathbf{a} = \mathbf{0}$
4. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

A 4. tulajdonság nélkül, csak *csoport*nak neveznénk $\mathfrak{V}$-t.

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$$

egyenlet a nullvektor definiáló tulajdonsága is lehetne.
2. Ha $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, akkor az

$$\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

egyenletet kell vizsgálnunk. Az a vektor lesz a megoldás, mely azonos hosszúságú **a**-val, párhuzamos vele és ellentétes irányú. Jelölje $-\mathbf{a}$ azt az egyetlen vektort, melyre teljesül:

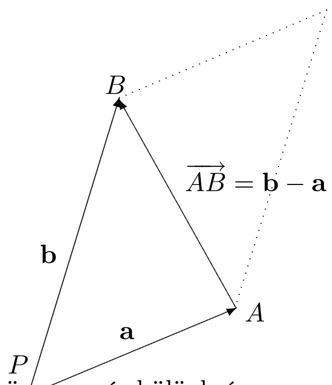
$$|-\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|, \qquad (-\mathbf{a}) \parallel \mathbf{a}, \qquad (-\mathbf{a}) \uparrow\downarrow \mathbf{a}$$

$-\mathbf{a}$-t nevezzük az **a ellentett vektorá**nak és definiáló tulajdonsága:

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

Az első egyenlet megoldásához nincs más hátra, minthogy az egyenlet mindkét oldalához hozzáadjunk $(-\mathbf{a})$-t (balról)

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{a}+\mathbf{x} & = & \mathbf{b} & / \quad (-\mathbf{a})+ \\ (-\mathbf{a})+\mathbf{a}+\mathbf{x} & = & (-\mathbf{a})+\mathbf{b} & \text{asszociatív szabály és ellentett tul.} \\ \mathbf{0}+\mathbf{x} & = & (-\mathbf{a})+\mathbf{b} & \text{nullvektor tul.} \\ \mathbf{x} & = & (-\mathbf{a})+\mathbf{b} & \text{kommutatív szabály} \\ \mathbf{x} & = & \mathbf{b}+(-\mathbf{a}) & \end{array}$$



Ezek után már definiálhatjuk:

$$\mathbf{b} - \mathbf{a} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{b} + (-\mathbf{a})$$

Tétel.

Ha $\overrightarrow{PA} = \mathbf{a}$ és $\overrightarrow{PB} = \mathbf{b}$, akkor $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$.

Tehát, ha közös kezdőpontból vektorok mutatnak az A és a B pontba, akkor az $\overrightarrow{AB}$ vektora a végpontjába mutató vektor mínusz a kezdőpontjába mutató vektor.

Az összegre és különbségre vonatkozóan igazolhatók a következő egyenlőtlenségek, melyek közül az elsőt **háromszög egyenlőtlenség**nek nevezzük.

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \ge \Big| |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}| \Big|$$

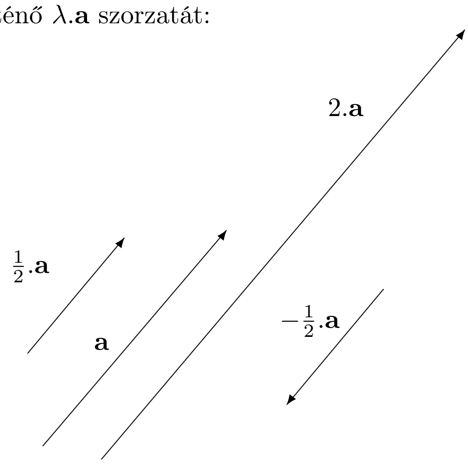
A **paralelogramma azonosság** pedig annak az elemi geometriai tételnek az vektoros megfogalmazása, hogy egy paralelogramma átlói hosszának négyzetösszege az oldalak hosszainak négyzetösszegével egyenlő:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2|\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{b}|^2$$

3. Skalárral való szorzás

Ha λ valós szám, akkor a következőképpen értelmezzük az **a** vektor λ skalárral történő $\lambda.\mathbf{a}$ szorzatát:

$$\begin{array}{rcl} |\lambda.\mathbf{a}| & = & |\lambda| \cdot |\mathbf{a}| \\ \lambda.\mathbf{a} & \parallel & \mathbf{a} \\ \lambda.\mathbf{a} & \begin{cases} \uparrow\uparrow \\ \uparrow\downarrow \end{cases} & \begin{array}{l} \mathbf{a}, \text{ ha } \lambda \ge 0 \\ \mathbf{a}, \text{ ha } \lambda < 0 \end{array} \end{array}$$



Tehát a λ skalárral való szorzás $|\lambda|$ szoros *nyújtás,* ha $\lambda > 1$, $|\lambda|$ arányú *zsugorítás,* ha $1 > \lambda > 0$ és ha $\lambda < 0$ akkor ezek mellett a vektor *kezdőpontjára történő tükrözés* is. Néhány határesetben már ismert vektorokhoz jutunk:

$$1.\mathbf{a} = \mathbf{a}$$

$$(-1).\mathbf{a} = -\mathbf{a}$$

$$0.\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

Műveleti azonosságok. Minden $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}$ esetén:

$$\lambda.(\mu.\mathbf{a}) = (\lambda \cdot \mu).\mathbf{a}$$

$$(\lambda + \mu).\mathbf{a} = \lambda.\mathbf{a} + \mu.\mathbf{a}$$

$$\lambda.(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda.\mathbf{a} + \lambda.\mathbf{b}$$

Az első két azonosság lényegében azt mondja ki, hogy egy rögzített egyenesen belüli vektorokra (értsd: a kollineáris vektorokra) a skaláris szorzás úgy viselkedik, mint a számegyenes pontjainak valós szorzása. A harmadik azonosság a párhuzamos szelők tételének egy vektoros átfogalmazása, amely nagyon fontos szerepet játszik a vektorok elemi geometriai bevezetésénél.

Párhuzamosság. Az $\mathbf{a}$ vektor párhuzamos a $\mathbf{b}$ nem nullvektorral, akkor és csak akkor, ha $\mathbf{a} = \lambda.\mathbf{b}$ alkalmas λ skalárral. (Nullvektorral minden vektor párhuzamos).

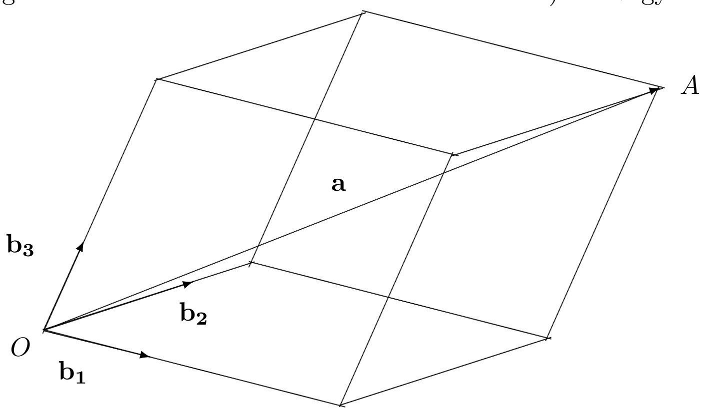
Tétel. Ha $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ és $\mathbf{b}_3$ három *nemkomplanáris* vektor, akkor tetszőleges $\mathbf{a}$ vektor egyértelműen áll elő:

$$\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \lambda_3\mathbf{b}_3$$

alakban, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ valós számok.

A $\lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \lambda_3\mathbf{b}_3$ összeget a $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ és $\mathbf{b}_3$ vektorok rendre $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ skalárokkal vett **lineáris kombináció**jának nevezzük. Nem komplanáris vektorok $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ rendszerét a tér egy **bázis**ának mondjuk.

Bizonyítás. Csak az általános eset igazoljuk, amikor $\mathbf{a}$ nincs a $\mathbf{b}_i$-k közül bármely kettő síkjában (akkor ugyanis a harmadik együtthatója 0, a másik kettő érték meghatározása visszavezethető a síkbeli esetre). Vegyük föl közös kezdőpontból az $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b}_1 = \overrightarrow{OB_1}$, $\mathbf{b}_2 = \overrightarrow{OB_2}$ és $\mathbf{b}_3 = \overrightarrow{OB_3}$ vektorokat. Az $(\overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{OB_2})$, $(\overrightarrow{OB_2}, \overrightarrow{OB_3})$, $(\overrightarrow{OB_3}, \overrightarrow{OB_1})$ síkokkal állítsunk párhuzamos síkokat az A ponton át. Ez a összesen 6 sík egy paralelepipedont határoz meg, melynek egyik testátlója éppen $\overrightarrow{OA}$. Legyenek a paralelepipedon O-ból induló (irányított) élei $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Ekkor $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$. Mivel az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ élvektorok rendre egy egyenesbe esnek a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ vektorokkal, ezért ezek aránya, mint *valós számok aránya* meghatározható és így $\lambda_1 = \frac{|\mathbf{a}_1|}{|\mathbf{b}_1|}$, $\lambda_1 = \frac{|\mathbf{a}_1|}{|\mathbf{b}_1|}$, $\lambda_1 = \frac{|\mathbf{a}_1|}{|\mathbf{b}_1|}$. A szerkesztés egyértelműsége miatt ezek a számok egyértelműen vannak meghatározva. ■



Ha meghatározzuk egy $\mathbf{v}$ vektor esetén az egyértelműen létező $\lambda_1\mathbf{b}_1$, $\lambda_2\mathbf{b}_2$ és $\lambda_3\mathbf{b}_3$ vektorokat, melyekkel $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \lambda_3\mathbf{b}_3$, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{v}$-t komponensekre bontjuk.

4. Skaláris szorzat

A skaláris szorzás bevezetésének motivációi:

(1) Leggyakrabban bázisvektoroknak három egységhosszúságú, egymásra páronként merőleges vektort választunk, melyet **ortonormált bázis**nak nevezünk. Világos, hogy ekkor a komponensek, a bázisvektorok egyeneseire eső merőleges vetületek. Ezek meghatározására való a skaláris szorzás.

(2) Egy egyenesen belüli (azaz kollineáris) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok minden szempontból úgy viselkednek, mint a valós számok, amennyiben a szorzást úgy tekintjük, mint $\lambda.\mu$, ahol λ, μ rendre az $\mathbf{a}$ illetve $\mathbf{b}$ hossza abszolút értékű és az $\mathbf{a}$ illetve $\mathbf{b}$ irányításának megfelelő előjelű szám. Két nem egy egyenesbe eső vektort ezzel a számegyenesen belüli szorzással csak akkor tudjuk összeszorozni, ha az egyiket merőlegesen rávetítjük a másikra, és a vetülettel végezzük el a szorzást.

(3) Alkalmazása a fizikában például: $W = \mathbf{F}\mathbf{s}$, azaz a munka az erő és a erő irányába tett elmozdulás szorzata. Vagy a $\mathbf{j}$ áramsűrűség és az $\mathbf{A}$ felületvektor szorzata a keresztmetszeten átfolyó áram: $I = \mathbf{j}\mathbf{A}$.

Definíció. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nemnulla vektorok skaláris szorzata:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\gamma$$

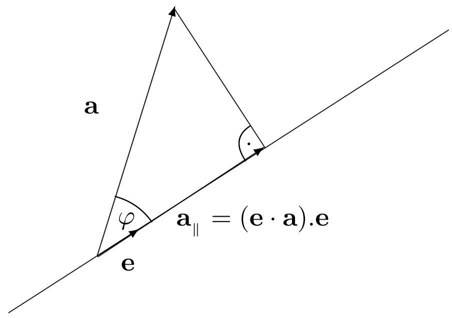
ahol $\gamma = (\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle$ az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által közbezárt szög. Nullvektor és egy másik tetszőleges vektor skaláris szorzata 0.

Világos, hogy ez egy külső művelet: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\in\mathbb{R}$, értéke nem vektor hanem skalármennyiség, így fel sem merül hogy asszociatív lenne.

Műveleti tulajdonságok. Minden $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbf{V}$ és $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ esetén:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$$
(szimmetrikus)

$$(\lambda.\mathbf{a}+\mu.\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\lambda\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})+\mu\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$$
(megtartja a lineáris kombinációt)



Geometriai tulajdonságok.

(1) $\mathbf{a}^2\overset{\text{def}}{=}\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}|^2$ ill. $|\mathbf{a}|=\sqrt{\mathbf{a}^2}$

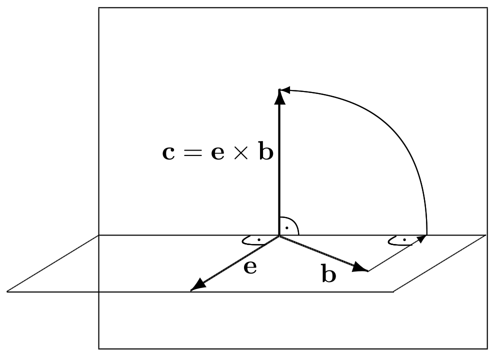
(2) Ha $\mathbf{e}$ egységvektor, akkor $\mathbf{e}\cdot\mathbf{a}$ az $\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{e}$ egyenesére eső merőleges vetülete (ez skaláris vetület, nem a vetületvektor, ami $(\mathbf{e}\cdot\mathbf{a}).\mathbf{e}$).

(3) Ha $\mathbf{a},\mathbf{b}$ nem nullvektorok, akkor
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0\qquad\Longleftrightarrow\qquad\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$$

(4) $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ és $\mathbf{b}_3$ ortonormált bázis alkot és $\mathbf{a}$ vektor, akkor
$$\mathbf{a}=(|\mathbf{a}|\cos\varphi).\mathbf{b}_1+(|\mathbf{a}|\cos\psi).\mathbf{b}_2+(|\mathbf{a}|\cos\vartheta).\mathbf{b}_3=(\mathbf{a}\mathbf{b}_1).\mathbf{b}_1+(\mathbf{a}\mathbf{b}_2).\mathbf{b}_2+(\mathbf{a}\mathbf{b}_3).\mathbf{b}_3$$
ahol φ,ψ és ϑ rendre a $(\mathbf{a},\mathbf{b}_1)_\angle$, $(\mathbf{a},\mathbf{b}_2)_\angle$ és $(\mathbf{a},\mathbf{b}_3)_\angle$ szögek.

5. Vektoriális szorzat

A vektoriális szorzás bevezetésének motivációi:



(1) Az $\mathbf{e}$ egységvektorral történő skaláris szorzás egy $\mathbf{b}$ vektor $\mathbf{e}$ irányú komponensét számítja ki. Az $\mathbf{e}$ egységvektorral történő vektoriális szorzás a $\mathbf{b}$ vektor $\mathbf{e}$-re merőleges $\mathbf{b}_\perp$ *komponens vektor*át számítja ki és ezt a vektort elforgatja $+90^{\text{o}}$-kal $\mathbf{e}$ körül. Ezzel a szorzással az ortonormált bázisvektorokat egymásba lehet forgatni egymás körül. Az $\mathbf{e}$ nem egységvektorral való vektoriális szorzás esetén a $\mathbf{b}$ merőleges komponensvektorát szintén elforgatjuk $+90^{\text{o}}$-kal $\mathbf{a}$ körül és a előjeles szorzást így végezzük el az a és $\mathbf{b}_\perp$ között.

(2) A geometria szemszögéből két szakasz szorzata egy téglalap területe. Két vektor esetén, amikor az irány is fontos, akkor az általuk kiveszített paralelogramma területe. A paralelogramma síkját egyértelműen meghatározza a normálvektora, innen, hogy vektoriális szorzat értéke olyan vektor, ami a két vektor síkjára merőleges. Az egymás után fűzött vektorok a síkjukban egy körbenjárást határoznak meg és elég kézenfekvő, hogy a területnek a kétféle körbenjárásnak megfelelően előjelet vagy irányítást adjunk. Ekkor a célnak megfelelő $\pm|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle$ előjeles szám az ún. *külső szorzat* (ez akárhány dimenziós térben értelmezhető), ha pedig az ilyen hosszúságú és megfelelő irányítású normálvektort vesszük, akkor az a vektoriális szorzat (ami lényegében csak 3D-ben van).

(3) Az $\mathbf{r}$ végpontjában egy testet támadó $\mathbf{F}$ erő forgatónyomatéka pont az $\mathbf{M}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ vektoriális szorzat. Az elektromágneses mező energiaáram-sűrűségvektora (a fény által az egységnyi, merőleges felületre időegységenként szállított energia, Pointing-vektor) $\mathbf{S}=\frac{1}{\mu}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ ahol $\mathbf{B}$ a mágneses mező (indukcióvektor), $\mathbf{E}$ az elektromos mező.

Definíció. Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két nem nullvektor, akkor az

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}\text{nagysága} & |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle\\ \text{iránya} & \perp\mathbf{a}\text{ és }\perp\mathbf{b}\\ \text{irányítása} & \mathbf{a},\ \mathbf{b}\text{ és }\mathbf{a}\times\mathbf{b}\text{ ilyen sorrendben }\textbf{jobbrendszer}\text{t alkot}\end{cases}$$

vektort az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ ilyen sorrendben vett **vektoriális szorzat**ának nevezzük. Ha valamelyik nullvektor, akkor a vektoriális szorzat definíció szerint $\mathbf{0}$.

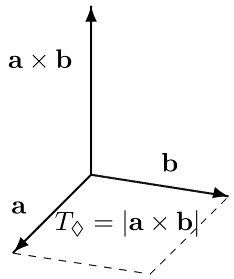
Műveleti tulajdonságok. Minden $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbf{V}$ és $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ esetén:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$$
(antikommutatív)

$$(\lambda.\mathbf{a}+\mu.\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\lambda.(\mathbf{a}\times\mathbf{c})+\mu.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$
(megtartja a lineáris kombinációt)

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{0}$$
(nem asszociatív, de igaz a Jacobi-azonosság)

Megjegyzés. Nem igaz az egyszerűsítési szabály: $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}$-ből $\mathbf{a}$ nemnulla esetén sem következik, hogy $\mathbf{b}=\mathbf{c}$. Mindazonáltal ha feltesszük emellett, hogy $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$, akkor nemnulla $\mathbf{a}$ esetén már teljesül. (Az egyszerűsítési szabály a skaláris szorzatra sem igaz, de együtt már mutatják a tulajdonságot.)



Geometriai tulajdonságok.

(1) Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egyike sem nullvektor, akkor $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ hossza az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített paralelogramma területe. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített háromszög területe $\frac{1}{2}\cdot|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$.

(2) Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ tetszőleges vektorok, akkor

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}\qquad\Longleftrightarrow\qquad\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$$

(3) $(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3)$ ortonormált bázis akkor és csak akkor alkot jobbrendszert, ha $\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2=\mathbf{b}_3$

6. Többszörös vektorszorzatok

Ha a skalárral való szorzást, a skaláris szorzást és a vektoriális szorzást értelmes módon kombináljuk, akkor gyakran hasznos, önálló jelentéssel bíró mennyiségeket kapunk.

(1) Vegyes szorzat: $(\mathbf{abc})\overset{\text{def}}{=}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$.

- (i) $(\mathbf{abc})=(\mathbf{bca})=(\mathbf{cab})=-(\mathbf{cba})=-(\mathbf{bac})=-(\mathbf{acb})$
- (ii) $(\mathbf{abc})$ az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata
- (iii) $\mathbf{abc}=0\qquad\Longleftrightarrow\qquad$ $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ egymáshoz komplanáris vektorok

(2) Kétszeres vektoriális szorzat: $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$

- (i) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=-\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{c}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$
- (ii) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=(\mathbf{ca}).\mathbf{b}-(\mathbf{cb}).\mathbf{a}$ (kifejtési tétel)
- (iii) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}))=\begin{vmatrix}\mathbf{ac} & \mathbf{bc}\\ \mathbf{ad} & \mathbf{bd}\end{vmatrix}$

Diádok. Az $\mathbf{a}\circ\mathbf{b}:\mathbf{r}\longmapsto(\mathbf{ar})\mathbf{b}$ leképezés a diadikus szorzat vagy diád, mely íly módon nem vektor, hanem operátor. A tenzorok diádok lineáris kombinációi.

7. Néhány térbeli alakzat vektoregyenlete.

(1) **Egyenes.** Az $\mathbf{r}_0$ végpontján áthaladó, nemnulla $\mathbf{v}$ irányvektorú egyenes mint ponthalmaz: $\{\mathbf{r}_0+t.\mathbf{v}\mid t\in\mathbb{R}\}$. Paraméteres vektoregyenletben:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t.\mathbf{v}\qquad t\in\mathbb{R}$$

Vektoregyenletben:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$$

(2) **Egyenes szakasz.** Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ végpontjai közötti zárt szakasz mint ponthalmaz: $\{\mathbf{a}+t.(\mathbf{b}-\mathbf{a})\mid t\in[0,1]\}=\{(1-t).\mathbf{a}+t.\mathbf{b}\mid t\in[0,1]\}$. Paraméteres vektoregyenletben:

$$\mathbf{r}=\mathbf{a}+t.(\mathbf{b}-\mathbf{a})\qquad t\in[0,1]$$

(3) **Sík.** Az $\mathbf{r}_0$ végpontjára illeszkedő, a nempárhuzamos $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ vektorok által kifeszített sík mint ponthalmaz: $\{\mathbf{r}_0+t.\mathbf{v}+s.\mathbf{u}\mid(t,s)\in\mathbb{R}^2\}$. Illetve $\{\mathbf{r}\in\mathbf{V}\mid(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{n}=0\}$ a $\mathbf{r}_0$ végpontjára illeszkedő, nemnulla $\mathbf{n}$ normálvektorú sík. Normálvektor adódik például a két irányvektor vektoriális szorzatából: $\mathbf{n}=\mathbf{v}\times\mathbf{u}$. Paraméteres vektoregyenletben:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t.\mathbf{v}+s.\mathbf{u}\qquad(t,s)\in\mathbb{R}^2$$

Vektoregyenletben:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{n}=0$$

(4) **Gömb.** A $\mathbf{c}$ végpontja mint középpont körüli, $R > 0$ sugarú gömb mint ponthalmaz: $\{\mathbf{r} \in \mathbf{V} \mid (\mathbf{r} - \mathbf{c})^2 = R^2\}$. Vektoregyenletben:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{c})^2 = R^2$$

8. Nevezetes vektorgeometriai feladatok

(1) Igazoljuk, hogy a háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást (ez az $\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$ vektor végpontja, amennyiben a csúcsokba mutató vektor egy kezdőpontból $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$)!

(2) Határozzuk meg az adott szakaszt $m : n$ arányban osztó pont helyzetét!

(3) Bizonyítsuk be a Koszinusztételt!

(4) Mi az adott pontra és síkra vonatkozó tükrözés, illetve az síkra vonatkozó vetítés hozzárendelési utasítása vektorosan?

(5) Bizonyítsuk be a szinusz tételt!

(6) Igazoljuk Héron területképletét!

(7) Igazoljuk, hogy a háromszög magasságpontjába mutató vektor $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, amennyiben a vektorok kezdőpontja a háromszög **körül írt körének középpont**ja.

(8) Igazoljuk, hogy a Feuerbach-kör középpontja $\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$, amennyiben a vektorok kezdőpontja a háromszög **körül írt körének középpont**ja.

9. Koordináta reprezentáció.

Definíció. Ha $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ bázis (nem komplanáris vektorok), akkor az egyértelműen meghatározott

$$[\,.\,]_B : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ \mathbf{a} \longmapsto \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}, \qquad \text{amelyre teljesül } \mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 + \lambda_3\mathbf{b}_3$$

függvényt a B-re vonatkozó koordináta-leképezésnek nevezzük. A $[\mathbf{a}]_B$ oszlopvektor neve, az $\mathbf{a}$ vektor B bázisra vonatkozó koordinátamátrixa.

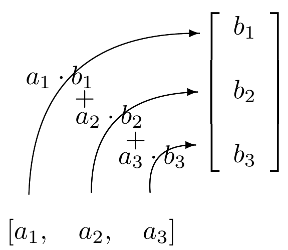
Az ortonormált, jobbsodrású rendszer bázisvektorainak jelölése általában $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$, illetve $\mathbf{a} = x.\mathbf{i} + y.\mathbf{j} + z.\mathbf{k}$ esetén $[\mathbf{a}] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ vagy az $\mathbf{a} = a_1.\mathbf{i} + a_2.\mathbf{j} + a_3.\mathbf{k}$ jelölés esetén $[\mathbf{a}] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$

$\mathbf{V}$ elemeit tehát kölcsönösen egyértelmű módon megfeleltethetjük a háromemeletes valós értékű oszlopvektorok $\mathbb{R}^3$ halmazának. A térvektorok közötti műveletek a reprezentáció által szintén megfeleltethető lesz $\mathbb{R}^3$-beli elemekkel végzett műveleteknek.

Tétel. (A vektorműveletek reprezentációi $\mathbb{R}^3$-ban) Ha $[\mathbf{a}] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ és $[\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, akkor

$$[\mathbf{a}+\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix}, \qquad [\lambda.\mathbf{a}] = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{bmatrix}, \qquad [\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}] = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, \qquad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 \\ -a_1b_3 + b_1a_3 \\ a_1b_2 - b_1a_2 \end{bmatrix}$$

Sor-oszlop skalárszorzás



$$= \mathbf{ab}$$

illetve vektoriális szorzás determinánssal:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_1 & b_3 \end{vmatrix} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

10. Az analitikus térgeometria alapfeladatai.

A sík koordinátaegyenlete: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, ahol (x_0, y_0, z_0) a sík egy pontja, (A, B, C) egy normálvektora.

Az egyenes paramétermentes egyenletrendszere: $\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c} \quad (=t)$ feltéve, hogy a, b, c egyik sem nulla.

Sík és pont távolsága: $d(\Sigma, P) = \dfrac{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, ahol a Σ sík adatai a fentiek, a pont $P(x, y, z)$.

(1) Pont és egyenes távolsága: $d(e, P) = \dfrac{|(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$

(2) Két egyenes hajlásszöge: $\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|}$

(3) Kitérő egyenesek távolsága: $d(e, f) = \dfrac{|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}|}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}$, ahol $\mathbf{a}$ az e irányvektora, $\mathbf{b}$ az f irányvektora, $\mathbf{c}$ a két egyenes egy-egy pontját összekötő vektor

(4) Egyenes és sík hajlásszöge: $\sin\varphi = \dfrac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{|\mathbf{n}||\mathbf{v}|}$

(5) Két sík által bezárt szög: $\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|}$