Metrikus tér, normált tér, topológia

(alapfogalmak)

Metrikus tér

Azt mondjuk, hogy az M nemüres halmaz metrikus teret alkot a $d : M \times M \longrightarrow \mathbf{R}$ metrikára vonatkozólag, ha tetszőleges x, y, z M-beli pontokra a következők teljesülnek:

(1) $d(x,y) \geq 0; \qquad x = y, \text{ ha, } \ d(x,y) = 0$

(2) $d(x,y) = d(y,x)$

(3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Példák.

(1) *(Diszkrét metrika)* Tetszőleges H nemüres halmazban: $d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = y \\ 1, & \text{ha } x \neq y \end{cases}$

(2) *(Euklideszi távolság)* $\mathbf{R}^n$-ben: $d_2(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

Halmazok metrikus térben.

(1) Ha $u \in M$ tetszőleges pont és ε pozitív szám, akkor az u pont ε sugarú **gömbi környezete:**

$$\mathrm{B}_\varepsilon(u) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M \mid d(x,u) < \epsilon\}$$

(2) Ha $u \in M$ tetszőleges pont és ε pozitív szám, akkor az u pont ε sugarú **kipontozott** vagy **kiszúrt környezete**:

$$\dot{\mathrm{B}}_\varepsilon(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{B}_\varepsilon(u) \setminus \{u\}$$

(3) A $H \subseteq M$ halmaz **korlátos**, ha létezik $u \in M$ és $r > 0$, hogy $H \subseteq \mathrm{B}_r(u)$.

Normált tér

Azt mondjuk, hogy a $||.|| : V \longrightarrow \mathbf{R}$ függvény norma a V vektortér felett, ha minden $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$-re és $\lambda \in \mathbf{R}$-re:

(1) $||\mathbf{v}|| \geq 0; \qquad \mathbf{v} = \mathbf{0}, \text{ ha, } \ ||\mathbf{v}|| = 0$

(2) $||\lambda.\mathbf{v}|| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{v}||$

(3) $||\mathbf{v} + \mathbf{u}|| \leq ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{u}||$

Példák.

(1) *($||.||_p$ norma)* $p > 0$ és $x \in \mathbf{R}^n$, akkor $||x||_p \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \Rightarrow \quad d_p(x,y) = ||x - y||_p$ metrika

   (i) *($||.||_1$: Minkowski-norma)* $||x||_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| \quad \Rightarrow \quad \mathrm{R}^2$-ben $B_\varepsilon^{||\cdot||_1}(0)$ „csúcsára állított” négyzet

   (ii) *($||.||_2$: Euklideszi norma)* $||x||_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{R}^3$-ban $B_1^{||\cdot||_2}(u)$ egységgömb

   (iii) *($||.||_\infty$: Csebisev-norma, Manhattan-norma)* $||x||_\infty = \max\{|x_i| \mid i = 1 \ldots n\} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{R}^2$-ben $B_1^{||\cdot||_\infty}(0)$ „oldalára állított” négyzet

(2) *(Szuprémumnorma)* Ha $\mathrm{B}(H, \mathbf{R})$ a H halmazon értelmezett $\mathbf{R}$-be képező korlátos függvények tere, akkor $||f||_{\sup} \stackrel{\text{def}}{=} \sup(|f|)$ norma. Ha $\mathrm{C}([a,b], \mathbf{R})$ az $[a,b]$ zárt és korlátos intervallumon értelmezett $\mathbf{R}$-be képező folytonos függvények tere, akkor $||.||_{\sup}$ Weierstrass-tétele miatt értelmes és norma. Ha $\ell_\infty(\mathbf{R})$ a korlátos valós sorozatok tere, akkor $||.||_{\sup}$ szintén norma.

Euklideszi tér

Azt mondjuk, hogy V valós euklideszi tér a $\langle ., .. \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbf{R}$ függvényre mint skaláris szorzatra vonatkozóan, ha minden $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$-re és $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$-re:

(1) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0; \qquad \mathbf{u} = \mathbf{0}, \text{ ha, } \ \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$

(2) $\langle \lambda.\mathbf{u} + \mu.\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \lambda \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \mu \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

(3) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$

Példa. $\mathbf{R}^n$-ben $\langle x, y \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$ skaláris szorzat. Az integrálható függvények $\mathrm{R}[a,b]$ terében $\langle f, g \rangle = \int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ skaláris szorzat, például $\langle \sin, \cos \rangle = 0$ az $\mathrm{R}[0, 2\pi]$-ben.

$\mathbf{R}^n$-ben: $\quad x \cdot y \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \quad \Rightarrow \quad ||x|| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x \cdot x} \quad \Rightarrow \quad d(x,y) = ||x-y||$

Topológikus tulajdonságok

Definíciók.

(1) $u \in \mathbf{R}^n$ **belső pont**ja a $H \subseteq \mathbf{R}^n$ halmaznak, ha létezik $\mathrm{B}_\varepsilon(u)$, hogy $\mathrm{B}_\varepsilon(u) \subseteq H$.

(2) $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ **nyílt**, ha minden pontja belső pont.

(3) $F \subseteq \mathbf{R}^n$ **zárt**, ha $\mathbf{R}^n \setminus F$ nyílt.

Nyílt és zárt halmaz duális fogalmak, de *nem* egymást kölcsönösen kizáró fogalamak. Vannak se nem nyílt, se nem zárt halmazok és vannak nyílt és zárt (nyílt-zárt) halmazok is.

$\mathbf{R}^n$ topológiája. Legyen $\mathfrak{T}$ az összes $\mathbf{R}^n$ nyílt halmaz halmaza. Ekkor $\mathbf{R}^n$ a $\mathfrak{T}$ halmazerendszerrel, mint topológiával ellátve topologikus tér, azaz rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

(1) $\varnothing, \mathbf{R}^n \in \mathfrak{T}$,

(2) ha $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathfrak{T}$, akkor $\Omega_1 \cap \Omega_2 \in \mathfrak{T}$,

(3) ha $\{\Omega_i\}_{i \in I} \subseteq \mathfrak{T}$ nemüres halmazrendszer, akkor $\bigcup_{i \in I} \Omega_i \in \mathfrak{T}$

Ám, végtelen sok nyílt halmaz metszete nem feltélenül nyílt. A duális fogalom a zárt halmazok $\mathfrak{F}$ halmazrendszere, melyben szintén benne van az üres halmaz és a tér maga, de *akármennyi* zárt halmaz metszete zárt, és *véges* sok zárt halmaz uniója zárt.

Tétel. ($\mathbf{R}^n$*-ben minden norma ekvivalens egymással*) Akármilyen norma által is definiáltassék a gömbi környezet fogalma, ezek ugyanazokhoz a nyílt halmazokhoz vezetnek, mint az euklideszi norma.

Sorozatok és topologikus tér.
Egy $(a_n) : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}^n$ sorozat konvergál az $u \in \mathbf{R}^n$ ponthoz, ha minden $\varepsilon > 0$-ra létezik $N \in \mathbf{Z}^+$, hogy minden $n \in \mathbf{Z}^+$, ha $n > N$, akkor $||a_n - u|| < \varepsilon$. (a_n) converegens, ha van u, amihez konvergál.

(1) u **torlódási pont**ja $H \subseteq \mathbf{R}^n$-nek, ha u minden kipontozott gömbi környezetében van H-beli elem.

  (1.1) u torlódási pontja H-nak, akkor és csak akkor, ha *van* $H \setminus \{u\}$-ban haladó u-hoz konvergáló sorozat.

(2) $F \subseteq \mathbf{R}^n$ zárt, akkor és csak akkor, ha tartalmazza minden torlódási pontját.

  (2.1) $F \subseteq \mathbf{R}^n$ zárt, akkor és csak akkor, ha *minden* H-ban haladó konvergens sorozatnak van H-beli határértéke.

(3) A konvergencia zárt az alapműveletekre és a normára: $(a_n + b_n)$, $(\lambda_n . a_n)$, $||a_n||$-re megfogalmazhatók az invariáns tulajdonságok.

Bolzano–Weierstrass-tételkör

(1) **Kompakt** egy K halmaz, ha minden nyílt halmazrendszerből, melynek uniója lefedi K-t kiválasztható véges sok nyílt halmaz is, melyek véges uniója még mindig lefedi K-t.

Tétel (*Heine–Borel*) Korlátos és zárt halmaz kompakt.

(2) **Sorozatkompakt** egy K halmaz, ha minden benne haladó sorozatból kiválasztható K-beli határértékű konvergens részsorozat.

Tétel (*Heine–Borel*) Korlátos és zárt halmaz kompakt.

Tétel (*Bolzano–Weierstrass*) Korlátos és zárt halmaz sorozatkompakt.

Következmény $\mathbf{R}^n$-ben a kompaktság ugyanaz, mint a sorozatkompakság.

Tétel (*Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel*) Korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Természetesen a csúcselemes bizonyítás nem itt működik, mert *nincs* a vektorműveletekkel kompatibilis rendezés $\mathbf{R}^n$-ben.

Vannak olyan terek, amiben korlátosság és zártság nem implikálja a kompaktságot. Példa erre a korlátos sorozatok $\ell_\infty(\mathbf{R})$ tere. Itt a zárt egységgömb nem kompakt.

Utolsó megjegyzés: R^n teljes abban az értelemben, hogy minden Cauchy-sorozat konvergens, ám van olyan normált tér, mely nem teljes, például a stacionárius nullsorozatok (véges sok elem kivételével nulla sorozatok) tere.