Halmazalgebra

(alapfogalmak, műveletek)

1. Alapvető fogalmak

Alapfogalmak. Azt mondjuk, hogy a **halmaz** fogalma és a halmaz **elem**ének lenni reláció a *halmazelmélet*ben *alapfogalom.*

> A halmazelméletben mindazonáltal azt gondoljuk, hogy csak a halmazok léteznek és csak a köztük lévő eleme vagy „elemként való tartalmazási kapcsolat" létezik. Minden kijelentést csak halmazokra fogalmazunk meg és csak az eleme kapcsolatot használhatjuk. Azt is gondoljuk emellett, hogy a halmazok tárgyak összessége, mely tárgyak maguk is halmazok és mely összesség maga is valamely halmaz eleme. A halmazok eme világa a matematika természetes közege, minden matematikai állítást megkísérlünk halmazokkal megfogalmazni.

Jelölések.

(1) A halmazokat általában nagy betűkkel jelöljük: A, B, ... , H, K, ... , X, Y, ...
Az elemeket pedig általában kis betűkkel: a, b, ... , x, y, ...

(2) Azt, hogy az x elem eleme a H halmaznak, az $x \in H$ jelsorral jelöljük.
Ha x *nem* elem eleme a H halmaznak, azt $x \notin H$ jelöli.

(3) Halmazokat megadhatunk:

- (i) felsorolással: $\{a, b, c, d\}$ (véges lista a halmaz elemeiről),
- (ii) tulajdonsággal: $\{x \in H \mid T(x)\}$, ami azt jelenti, hogy „a H halmaz azon x elemei, melyek rendelkeznek a $T(x)$ tulajdonsággal"
az $\{x \mid T(x)\}$ – tehát H nélkül – típusú halmazmegadás csak akkor használható, ha előtte meggyőződtünk arról, hogy ez halmaz (lásd: valódi osztályok)
- (iii) a halmaz elemeinek formai tulajdonságának megadásával: pl: $\{1, 3, 5, ...\}$ vagy $\{1, 3, 5, ..., 2n-1, ...\}$ vagy $\{2n-1 \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ (ekkor végtelen sok elemet is „felsorolhatunk").

Definíciók.

(1) **Halmazok egyenlősége.** Két halmaz egyenlő, ha ugyanazok az elemeik. (Formálisan, ha az $x \in A$ kijelentés egyenértékű az $x \in B$ kijelentése, ahol x-re semmilyen megszorítás nincs érvényben.)

(2) **Részhalmaz.** A részhalmaza B-nek, ha A minden eleme eleme B-nek is. (Formálisan, ha az $x \in A$ kijelentésből következik az $x \in B$ kijelentés, ahol x-re semmilyen megszorítás nincs érvényben.) Jelben: $A \subseteq B$ vagy $B \supseteq A$ (illetve $A \subset B$ vagy $B \supset A$).

(3) **Valódi részhalmaz.** A részhalmaza B-nek, ha A részhalmaza B-nek, de A nem egyenlő B-vel. Jelben a zavar elkerülése érdekében $A \subsetneq B$ vagy $A \subsetneq B$ vagy $A \subsetneqq B$ ($A \subset B$ lehet, de kerülendő).

(4) **Üreshalmaz.** $\emptyset \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \neq x\}$. Illetve belátható, hogy egyetlen olyan halmaz van, mely minden halmaznak részhalmaza, ezt nevezzük az üreshalmaznak.

(5) **Hatványhalmaz.** Ha A halmaz, akkor A összes részhalmaza halmazt alkot és ezt $\mathcal{P}(A)$ jelöli. (Formálisan $\mathcal{P}(A) \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \subseteq A\}$, amely esetben halmazelméleti axióma gondoskodik arról, hogy ez halmaz legyen.)

Valódi osztályok. A $\{\,\mid\,\}$ módon megadható matematikai objektumok között vannak olyanok, melyek nem halmazok – ezek nem állhatnak az $\in$ jel bal oldalán.

(1) Russell-osztály: $\mathsf{Rus} \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x \notin x\}$

(2) Neumann-univerzum: $\mathsf{Set} \overset{\text{def}}{=} \{x \mid x = x\}$

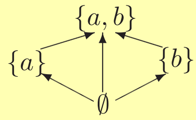
2. Részhalmazok

Rendezési tulajdonságok

(1)	$A \subseteq A$	$\subseteq$ **reflexív** tulajdonsága
(2)	ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$	$\subseteq$ **tranzitív** tulajdonsága
(3)	ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor $A = B$	$\subseteq$ **antiszimmetrikus** tulajdonsága. **A kölcsönös tartalmazás tétele.**

$\emptyset$ *tulajdonsága*: az üres halmaz minden halmaznak része és ez az egyetlen ilyen tulajdonságú halmaz.

Példa ($\langle \mathcal{P}(H), \subseteq \rangle$). Legyen H halmaz. $\langle \mathcal{P}(H), \subseteq \rangle$ struktúra *rendezett halmaz* (azaz reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus). Továbbá $\emptyset \in \mathcal{P}(H)$ a legszűkebb (legkisebb), $H \in \mathcal{P}(H)$ a legbővebb (legnagyobb). A véges rendezett halmazokat *irányított gráfban* ábrázolhatjuk (az ábrán $\mathcal{P}(\{a,b\})$ látható).



3. Műveletek

Logikai kötőszavak rövidítései: $\wedge$ – és; $\vee$ – vagy; $\neg$ – nem (tagadás); $\exists$ – létezik; $\forall$ – minden.

Definíciók. Ha A, B halmazok, illetve $\mathcal{A}$ halmazok halmaza (halmazrendszer), akkor

(1) (i) A és B **uniója**: $A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ („legalább az egyikben benne vannak”)

(ii) Az $\mathcal{A}$ **halmazrendszer uniója**: $\cup\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid (\exists A \in \mathcal{A})(x \in A)\}$

(2) (i) A és B **metszete**: $A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ („mindkettőben benne vannak”)

(ii) Az $\mathcal{A}$ **halmazrendszer metszete** $\cup\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid (\forall A \in \mathcal{A})(x \in A)\}$

(3) (i) A **mínusz** B (A különbség B): $A \setminus B$ vagy $A - B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A \mid x \notin B\}$ („olyan A-beliek, melyek nem B-beliek”)

(ii) ha H halmaz, akkor **A-nak a H-ra vonatkozó komplementere** $H \setminus A$. Jelölése: $\overline{A}\big|_H$, illetve, ha előre meg van adva H, akkor $\overline{A}$.

(4) (i) Az x és y elemek rendezett párja: $(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{x\}, \{x, y\}\}$

(ii) A és B **Descartes-szorzata**: $A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Példa ($\langle \mathcal{P}(H), \subseteq \rangle$ háló). $\mathcal{P}(H)$-ban bármely nemüres legfeljebb kételemű halmaznak van legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátja (ezek pont a halmazok uniója és metszete), melyek tehát műveletet eredményeznek $\mathcal{P}(H)$ felett.

Műveleti azonosságok. Ha H tetszőleges halmaz és $A, B, C \subseteq H$, akkor az alábbi azonosságok teljesülnek. Ezek közül az első részben láthatók a Boole-algebrák definiáló tulajdonságai, a második rész két utolsó azonossága pedig a **de Morgan-szabály**ok.

asszociatív		$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$		
kommutatív		$A \cup \emptyset = A$	$A \cap H = A$
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$		
elnyelési (abszorbciós) tulajdonság		$A \cup H = H$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$		
disztributív		$\overline{H} = \emptyset$	$\overline{\emptyset} = H$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$		
komplementált		$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
$A \cup \overline{A} = H$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$		

Boole-algebra. $\langle B, \cdot, +, -, 0, 1 \rangle$ Boole-algebra, ha B zárt a $\cdot$, $+$ kétváltozós műveletekre, ezek asszociatívak, kommutatívak, igaz rájuk az elnyelési tulajdonság és a disztributív szabály, továbbá $0, 1$ olyan B-beli elemek, hogy $a + 0 = a$, $a \cdot 1 = 1$ minden $a \in B$-re és komplementáltak, azaz minden $a \in B$-re és az egyváltozós $-$ műveletre: $\overline{a} + a = 1$ és $\overline{a} \cdot a = 0$.

Példák.

(1) Az igazságértékek $\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}$ halmaza a $\vee$, $\wedge$, $\neg$ műveletekre és $\mathbf{i}, \mathbf{h}$ értékekre a kételemű Boole-algebrát alkotja.

(2) A $\mathcal{P}(H)$ tetszőleges H halmazzal. Ha H véges, n elemű, akkor ez 2^n elemű.

(3) Négyzetmentes szám pozitív osztói.